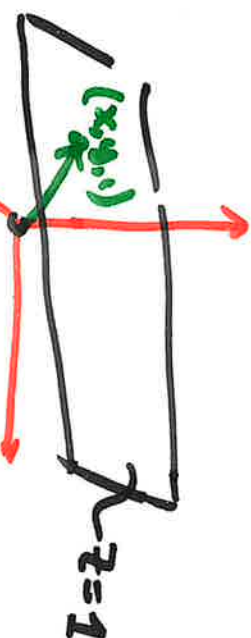


$n \geq 1$

$$(x, y) \in \mathbb{A}^2$$



$$L((x, y, 1))$$

$$[x, y, 1]$$

coordinate omogenee

$$(x, y) \rightarrow [ax, ay, a]$$

$$\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) \mapsto [x_1, x_2, x_3] \quad x_3 \neq 0$$

Spazi proiettivi

di dim = t

Sp. vettoriali

di $\mathbb{A}^{n+1}$

dimensione vett. $t+1$

Rappresenta

spazi affini

di dim = t

$$\mathbb{A}^n(\mathbb{A}^1)$$

$$AX=B \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

se Σ ha eq. $AX=B$

$$\longrightarrow (A|B) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \underline{0}$$

$\longrightarrow \Sigma$ di eq. $(A|B)$

contiene come punti propri tutti e soli i punti di Σ e come punti impropri ($x_{n+1}=0$) tutte e sole le direzioni di rette contenute in Σ .

N.B.

il luogo di tutti i punti impropri in $\mathbb{P}^{n+1}_K$ ha equazione $x_{n+1}=0$ ed è un iperpiano $\rightarrow$ iperpiano improprio o iperspazio $\mathbb{A}^n$

Def: In $AG_n(K)$ si dice che t punti sono geometricamente indipendenti se il più piccolo sottospazio affine che li contiene ha dimensione $t-1$.



2 = indipendenti



3 = non allineati

Dati t punti il più piccolo sottospazio affine che li contiene ha al più dimensione $(t-1)$

$(P_2, P_3 \dots P_t) = \text{punti} \Rightarrow \text{il più piccolo sottospazio affine che li contiene deve essere } [P_2, L(\vec{P_2P_3} \dots \vec{P_2P_t})]$

in questo caso è $\Sigma = \{P_i; i \geq 1\}$ abbiamo
 che $P_i \in \Sigma \Leftrightarrow \vec{P}_i P_i \in W$ $i \geq 1$
 e quindi $\dim W \leq t-1$.

Assumiamo che Σ sottospazi affini non vuoti è
 l'intersezione

un sottospazio affine. $\Rightarrow$ Se $\{P_1, \dots, P_t\} \subseteq \Sigma$ e $\{P_1, \dots, P_t\} \subseteq \Pi$
 $\Rightarrow \{P_1, \dots, P_t\} \subseteq \Sigma \cap \Pi$ e $\Sigma \cap \Pi \neq \emptyset$ è un sott. affine.

In generale consideriamo $\Sigma = \langle P_1, \dots, P_t \rangle$ per
 indicare il sott. dato e $P_1, \dots, P_t$ sono indip $\Leftrightarrow$
 $\dim \Sigma = t-1$

$\dim W = \dim L(\vec{P}_1 P_1, \dots, \vec{P}_t P_t) \Rightarrow$ si calcola il rango.

Cosa accade in $\mathbb{P}^n/\mathbb{K}$?

$$\Sigma \longrightarrow \hat{\Sigma} \subseteq \mathbb{K}^{n+1} \text{ con } \dim_{\text{vert.}} \hat{\Sigma} = \dim \Sigma + 1$$

$\Rightarrow \dim \Sigma = t-1 \Rightarrow \dim_{\text{vert.}} \hat{\Sigma} = t$

ma $\hat{\Sigma}$ è proprio lo sverthorile generale
della curva giun dei punti di Σ .

In particolare se

$$P_t = (x_{t1} \ x_{t2} \ \dots \ x_{tn}) \longrightarrow \hat{P}_t = [x_{t1} \ \dots \ x_{tn} \ 1]$$

$$P_t = (x_{t2} \ \dots \ x_{tn}) \longrightarrow \hat{P}_t = [x_{t2} \ \dots \ x_{tn} \ 1]$$

e $P_2 \dots P_t$ sono geometricamente indep $\Leftrightarrow$

$\hat{P}_2 \dots \hat{P}_t$ sono linearmente indipendenti !!

per lo spazio $n=3$ 3-dimensionale.

3 punti

$$(x_1, y_1, z_1) = P_1$$

$$(x_2, y_2, z_2) = P_2$$

$$(x_3, y_3, z_3) = P_3$$

sono indip.

$$\Leftrightarrow \text{rk} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$(x, y, z) \in \text{spazio} < P_2, P_1, P_3 >$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z, 1) \in \mathcal{L}(\hat{P}_2, \hat{P}_1, \hat{P}_3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

PUNTO PER 3

PUNTI NON

ALLINEATI.

Esercizio:

$n=3$ n di permutazioni e eq. del

più piccolo sottospazio che passa per i

punti: $P_2 = (1\ 2\ 3)_{\text{per}}$

$P_2 = (0\ 1\ 1)_{\text{per}}$

$P_3 = (1\ 3\ 4)_{\text{per}}$

$P_4 = (2\ 4\ 6)$

1 1 2 0

$$\hat{P}_2 = [1\ 2\ 3\ 1]$$

$$\hat{P}_1 = [0\ 1\ 1\ 1]$$

$$\hat{P}_3 = [1\ 3\ 4\ 1]$$

$$\hat{P}_4 = [2\ 4\ 6\ 1]$$

$\rightarrow nk=3 \Rightarrow$

il sott. generato da

$P_0\ P_1\ P_3\ P_4$ ha dim $= 3$

$\Rightarrow$ è un piano.

$$(2\ 4\ 6\ 1) = (1\ 3\ 4\ 1) + (1\ 2\ 3\ 1) - (0\ 1\ 1\ 1)$$

In particolare $\hat{P}_2 \hat{P}_3 \hat{P}_3 \hat{P}_2$ generano lo
 stesso sott. che $P_2 P_2 P_3 P_4 \Rightarrow$

$$T = \langle P_2 P_2 P_3 \rangle.$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} x & y & z & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \Rightarrow \text{eq. del piv.}$$

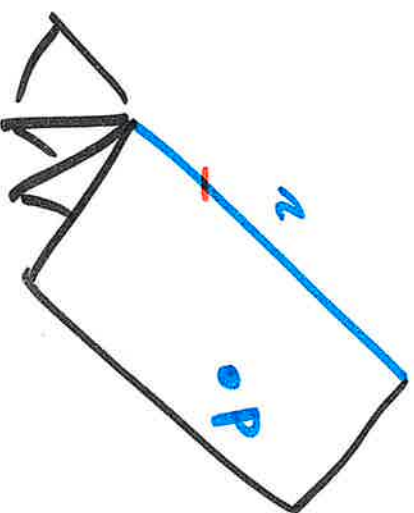
Teorema: in IP^3 due rette si intersecano sempre
 in almeno un punto.
 in IP^3 due piani si intersecano sempre
 in almeno una retta.

Dim: Formula di Grassmann:

$h=2$ in IK^3 due rett. 2 dim. si intersecano
 sempre in almeno una sp. 1-dim. $2+2=4 > 3$

$n=3$ in $\mathbb{A}^4$ due ret. 3-dim si intersecano
 sempre in almeno uno sp. 2-dim $\Rightarrow$
 retta $3+3=6 > 4$. $\square$

$[m=3]$



Se $\pi \neq \sigma$
 $\pi \cap \sigma = \pi_0$ ed k retta propria $\Rightarrow$
 π e σ generano un fascio
 proprio di piani perché
 ogni piano c. lineare di π e σ
 contiene π_0 e ogni piano
 per π_0 è c. lineare di π e σ
 speni



Se $\pi \cap \sigma = \pi_0$ ed π_0 retta impropria $\Rightarrow$
 π_0 $\Rightarrow \pi$ e σ generano un fascio
 improprio di piani (in tali π_0 ;
 giacitura comune di π e $\sigma \Rightarrow \pi \parallel \sigma$).

Trasformazioni di $\mathbb{P}^n/\mathbb{K}$.

$[n=2]$

$AG_n(\mathbb{K})$

$$X' \mapsto AX + B$$

trasf. affine.

$\det A \neq 0$

Se $A=I \Rightarrow$ si parla di
traslazione.

oss: Le trasformazioni che

mantengono sottospazi
in sottospazi della
medesima dimensione
e preservano l'incidenza.

$\mathbb{P}^2/\mathbb{K}$

Le trasformazioni di

~~$\mathbb{P}^2$~~ $\mathbb{P}^2/\mathbb{K}$ in se

sono tutte tras.

che mantengono sott.

vettoriali di $\mathbb{K}^n$ in se.
~~vettoriali che preservano dim.~~
~~trasformazioni~~ e quindi

sono descritte (quella

lineare!) da una

matrice

$\hat{A} \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$.

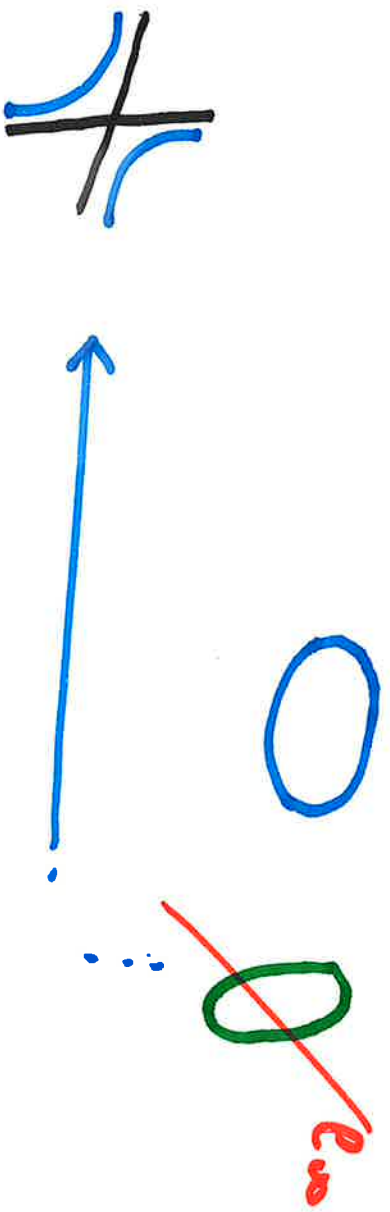
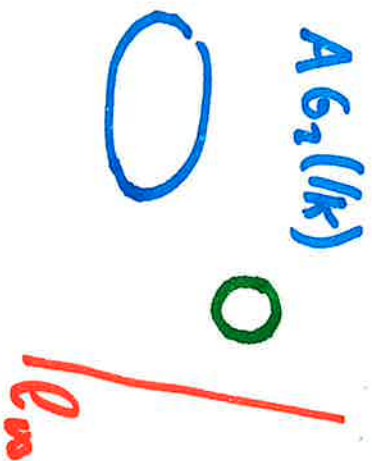
$\Rightarrow$ SONO DI PIÙ BELLE

TRASFORMAZIONI DI

$AG_n(\mathbb{K})$!!

Una trasformazione di P^2/K è anche una
trasformazione di $AG_2(K)$ e.s.s. manda punti propri

in punti propri e
punti impropri in
punti impropri.



$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ m \\ o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e' \\ m' \\ o \end{bmatrix}$$

$$V(e, m) \in K^2 \setminus \{0\}.$$

$$(l, m) = (1, 0)$$

$$(l, m) = (0, 1)$$

$$a_{31}l + a_{32}m + 0 \cdot a_{33} = 0$$

$$\Rightarrow a_{31} = 0 \quad a_{32} = 0$$

Una matrice in $\mathbb{P}^2/\mathbb{K}$ che corrisponde ad una trasformazione affine ha la forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\text{con } a_{33} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

Supponiamo $wlog \ a_{33} = 1$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & m \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by+c \\ cx+dy+m \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$(x, y) \rightarrow A^* \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ m \end{bmatrix}$$

A rappresenta la tras. affine A^* che fissa l'origine + una traslazione di vettore $\begin{pmatrix} c \\ m \end{pmatrix}$.

Geometria Euclidea

$k \in \mathbb{R}$ + distanza euclidea

indotta da un prod.

scalare definito positivo.

$AG_n(\mathbb{R})$ e in d. una definizione una distanza euclidea

$$d(p, q) := \|\vec{pq}\|$$

$d: A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ è una distanza
indefinita

$$d(A, B) \geq 0$$

$$d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$$

$$d(A, B) = d(B, A)$$

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B).$$

In $AG_n(\mathbb{R})$ definiamo due sottospazi

$$\Pi = [P, W], \quad \Sigma = [Q, U]$$

come ortogonali $\Leftrightarrow W \subseteq U^\perp$ oppure $U^\perp \subseteq W$.

$$U \subseteq W^\perp$$

$$U^\perp \subseteq W$$

N.B.: ~~$\Pi \perp \Sigma$~~ $\Pi \perp \Sigma \Leftrightarrow \Sigma \perp \Pi$.

oss: In generale in $AG_n(\mathbb{R})$ abbiamo un riferimento
affine $P = (O, B)$ $B = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$.

Rispetto a $\mathcal{O}$ il prod. scalare di $\mathbb{R}^n$ avrà una
matrice B in cui tutti gli autovalori sono > 0
con $B = {}^t B$.

Noi però sappiamo che è sempre possibile prendere
come base di $\mathbb{R}^n$ una base ortonormale rispetto "o"
il prodotto scalare e rispetto tale base "o" ha
come matrice I la matrice identità.

$E_n(\mathbb{R})$ geometria euclidea di dim n su $\mathbb{R}$
in cui si ha una struttura di geometria
affine su $\mathbb{R}$ ed un prodotto scalare "o" def. positivo
su $V_n(\mathbb{R})$.

• Riferimento Euclideo un rif affine

$\Gamma = (\mathcal{O}, \mathcal{O}')$ ove $\mathcal{O}' = \text{base ortonormale per "o"}$

In coordinate

$$(x_1 \dots x_n) \cdot (y_1 \dots y_n) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

In particolare se

$$P = (x_1 \dots x_n)$$

$$Q = (y_1 \dots y_n)$$

$$\Rightarrow d(P, Q) = \|\vec{PQ}\| = \|(y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n)\| = \\ = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$$

$n=1$:

$$P = (x_P, y_P)$$

$$Q = (x_Q, y_Q)$$

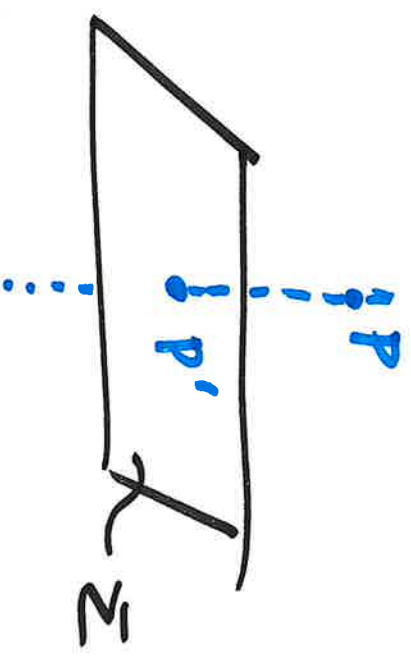
$$d(P, Q) = \sqrt{(y_Q - y_P)^2 + (x_Q - x_P)^2}$$

Def: Sia $P \in E_n(\mathbb{R})$ e $\Sigma = \text{Mat}[Q; W]$ un'ortosipazio di $E_n(\mathbb{R}) \Rightarrow$ la proiezione ortogonale di P

$n \Sigma$ l'informazione da
 $\{P\} = [P; w+1]_{n \Sigma}$.

Teorema: Sia $\Sigma = [Q; w]$ un sottospazio

$P \in EG_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \Sigma \cap [P; w+1]$ è
 esattamente un punto (proprio!).



Dm: Possiamo in $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$ e sia $\hat{\Sigma}$ e $\hat{\Theta}$

rispettivamente i sottospazi associati a Σ ed a $[P; w+1]$.

$$\Rightarrow \dim \Sigma = t \Rightarrow \dim \hat{\Sigma} = t+1$$

$$\Rightarrow \dim \hat{\Theta} = n-t \Rightarrow \dim \hat{\Theta} = n-t+1$$

$$\Rightarrow \dim \hat{\Sigma} + \dim \hat{\Theta} = n - k + 1 + k + 1 = n + 2$$

$> n + 1$

quindi $\hat{\Sigma}$ e $\hat{\Theta}$ si intersecano in almeno un punto. D'altro canto i punti all' ∞ di

$\hat{\Sigma}$ corrispondono alle dir. in W e quelli in $\hat{\Theta}$ alle direzioni in $W^\perp$ ma $W \cap W^\perp = \{0\}$.

$\Rightarrow \hat{\Sigma} \cap \hat{\Theta}$ non ha punti all'infinito e non è vuoto.

$\Rightarrow \hat{\Sigma} \cap \hat{\Theta}$ è un sott. primitivo che non contiene vetti e dunque ha $\dim. \text{ vettoriale} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ è un punto proprio. $\square$